Faculté des sciences et génie
Département de mathématiques et statistique

Examen 1 — Solutions

Probabilités (STT-1500)
14 février 2024 (8 h 30 à 10 h 20)
Enseignant : Jérôme Soucy

Question 1

(a) Trouvez le coefficient de x^2y^3 dans le développement de $(4x - 3y)^5$.

> En utilisant le théorème multinomial, le coefficient de x^2y^3 dans le développement de $(4x - 3y)^5$ est
> $$\frac{5!}{2!3!}4^2(-3)^3 = -4320.$$

(b) Combien d'anagrammes du mot `perlinpinpin` peut-on former ?

> Le mot PERLINPINPIN comporte 12 lettres dont 3 P, 1 E, 1 R, 1 L, 3 I et 3 N. Par conséquent, il y a
> $$\frac{12!}{3!1!1!1!3!3!} = 2\ 217\ 600 \text{ anagrammes.}$$

(c) Vous êtes dans un groupe de 20 personnes. L'enseignante partitionne le groupe en équipes de 2 personnes au hasard. Quelle est la probabilité que vous soyez en équipe avec Dimitri, un de vos camarades du groupe ?

> Votre coéquipier sera choisi uniformément parmi les 19 autres personnes du groupe. Par conséquent, la probabilité que ce soit Dimitri qui sera choisi est de $\frac{1}{19} \approx 0{,}053$.
>
> **Autre solution** : Distinguons les 10 équipes et les deux positions dans chaque équipe (par exemple un président et un vice-président). Le nombre de cas favorables à l'événement qui nous intéresse est $\binom{10}{1} \cdot \binom{2}{1} \cdot 18!$. En effet, on choisit l'équipe où vous serez en équipe avec Dimitri. On choisit ensuite la position dans l'équipe que vous occuperez (l'autre sera forcément occupée par Dimitri). On permute ensuite les 18 autres élèves dans les positions non occupées. Au total, Il y a 20! manières de répartir les élèves si les équipes sont distinctes et les positions dans l'équipe le sont aussi. La probabilité cherchée est donc
> $$\frac{20 \cdot 18!}{20!} = \frac{1}{19}.$$

(d) Vous pigez 3 cartes (sans remise) d'un paquet régulier de 52 cartes. Quelle est la probabilité de piger au moins un As ?

> C'est équivalent à calculer
> $$1 - \mathbb{P}[\text{On pige aucun As}] = 1 - \frac{\binom{48}{3}}{\binom{52}{3}} = 1 - \frac{48!3!49!}{3!45!52!} = \frac{1201}{5525} \approx 0{,}217.$$

(e) De combien de manières différentes pouvez-vous répartir 20 chocolats identiques dans 4 boîtes identiques de manière à ce que chaque boîte contienne au moins deux chocolats ?

> Plaçons d'abord 2 chocolats dans chacune des boîtes. Le problème est donc équivalent à répartir 12 boules identiques dans 4 urnes différentes en n'ayant aucune condition sur le nombre minimal de boules à mettre dans une urne. Nous avons vu que cela est équivalent à trouver le nombre de solutions dans les entiers positifs à l'équation $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$. Ce nombre est équivalent au nombre d'arrangements de 12 boules et 3 séparateurs, ce qui correspond à $\binom{15}{3} = 455$ manières.

(f) Vous jouez à pile ou face jusqu'à obtenir pile deux fois de suite. Quelle est la probabilité que vous deviez lancer la pièce de monnaie au moins quatre fois ?

> Considérons les 8 résultats possibles après trois lancers d'une pièce de monnaie : $PPP, PPF, PFP, FPP, FFF, FFP, FPF, PFF$. Du nombre, il y a 5 cas favorables à l'événement dont on cherche à calculer la probabilité, soit PFP, FFF, FFP, FPF, PFF. La probabilité cherchée est donc $\frac{5}{8}$.

(g) Vous pigez une main de 6 cartes choisies au hasard d'un paquet régulier de 52 cartes. Combien de mains sont telles qu'il y a exactement trois couleurs présentes où chaque couleur y est représentée exactement deux fois ? Par exemple, $3\heartsuit\ R\heartsuit\ 4\spadesuit\ 8\spadesuit\ A\clubsuit 3\clubsuit$ est une telle main alors que $3\heartsuit\ R\heartsuit\ 4\heartsuit\ 8\spadesuit\ A\clubsuit 3\clubsuit$ n'en est pas une.

> On choisit d'abord les trois couleurs parmi quatre qui seront représentées. Ensuite, pour chacune des trois couleurs, on choisit les deux cartes parmi treize qui représentent chacune des couleurs. On trouve que le nombre de mains correspond à
>
> $$\binom{4}{3}\binom{13}{2}^3 = 1\,898\,208.$$

Question 2

Les étudiants du cours d'introduction à la microbiologie sont répartis en deux sections : la section A, qui comporte 50 étudiants, et la section B, qui en comporte 75. Chaque étudiant prend part à trois examens. Pour réussir le cours, l'étudiant doit en réussir au moins deux. Voici un tableau qui précise les différentes probabilités de réussite aux examens pour un étudiant selon la section à laquelle il est inscrit.

Probabilités de réussir les évaluations			
	Examen 1	Examen 2	Examen 3
Section A	0,60	0,70	0,80
Section B	0,55	0,65	0,70

(a) Calculez la probabilité qu'un étudiant de la section A réussisse le cours.

> Définissons les événements suivants :
>
> $$\begin{aligned} R_A &= \text{L'étudiant choisi dans la section A réussi le cours;} \\ E_1 &= \text{L'étudiant choisi dans la section A réussi l'examen 1;} \\ E_2 &= \text{L'étudiant choisi dans la section A réussi l'examen 2;} \\ E_3 &= \text{L'étudiant choisi dans la section A L'étudiant réussi l'examen 3.} \end{aligned}$$

Nous pouvons écrire R_A comme l'union d'événements incompatibles de la manière suivante :

$$R_A = (E_1 \cap E_2 \cap E_3) \cup (E_1 \cap E_2 \cap {E_3}^{\mathrm{c}}) \cup (E_1 \cap {E_2}^{\mathrm{c}} \cap E_3) \cup ({E_1}^{\mathrm{c}} \cap E_2 \cap E_3)\,.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[R_A] &= \mathbb{P}[E_1 \cap E_2 \cap E_3] + \mathbb{P}[E_1 \cap E_2 \cap {E_3}^{\mathrm{c}}] + \mathbb{P}[E_1 \cap {E_2}^{\mathrm{c}} \cap E_3] + \mathbb{P}[{E_1}^{\mathrm{c}} \cap E_2 \cap E_3] \\ &= \mathbb{P}[E_1]\mathbb{P}[E_2]\mathbb{P}[E_3] + \mathbb{P}[E_1]\mathbb{P}[E_2]\mathbb{P}[{E_3}^{\mathrm{c}}] + \mathbb{P}[E_1]\mathbb{P}[{E_2}^{\mathrm{c}}]\mathbb{P}[E_3] + \mathbb{P}[{E_1}^{\mathrm{c}}]\mathbb{P}[E_2]\mathbb{P}[E_3] \\ &= 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 + 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}8 + 0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 \\ &= 0{,}788.\end{aligned}$$

(b) Calculez la probabilité qu'un étudiant du cours de microbiologie réussisse le cours.

Nous connaissons maintenant la probabilité qu'un étudiant de la section A réussisse le cours. Calculons celle qu'un étudiant de la section B réussisse le cours.

$$\begin{aligned} R_B &= \text{L'étudiant choisi dans la section B réussi le cours}\,; \\ F_1 &= \text{L'étudiant choisi dans la section B réussi l'examen 1}\,; \\ F_2 &= \text{L'étudiant choisi dans la section B réussi l'examen 2}\,; \\ F_3 &= \text{L'étudiant choisi dans la section B L'étudiant réussi l'examen 3.} \end{aligned}$$

Nous pouvons écrire R_B comme l'union d'événements incompatibles de la manière suivante :

$$R_B = (F_1 \cap F_2 \cap F_3) \cup (F_1 \cap F_2 \cap {F_3}^{\mathrm{c}}) \cup (F_1 \cap {F_2}^{\mathrm{c}} \cap F_3) \cup ({F_1}^{\mathrm{c}} \cap F_2 \cap F_3)\,.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[R_B] &= \mathbb{P}[F_1 \cap F_2 \cap F_3] + \mathbb{P}[F_1 \cap F_2 \cap {F_3}^{\mathrm{c}}] + \mathbb{P}[F_1 \cap {F_2}^{\mathrm{c}} \cap F_3] + \mathbb{P}[{F_1}^{\mathrm{c}} \cap F_2 \cap F_3] \\ &= \mathbb{P}[F_1]\mathbb{P}[F_2]\mathbb{P}[F_3] + \mathbb{P}[F_1]\mathbb{P}[F_2]\mathbb{P}[{F_3}^{\mathrm{c}}] + \mathbb{P}[F_1]\mathbb{P}[{F_2}^{\mathrm{c}}]\mathbb{P}[F_3] + \mathbb{P}[{F_1}^{\mathrm{c}}]\mathbb{P}[F_2]\mathbb{P}[F_3] \\ &= 0{,}55 \cdot 0{,}65 \cdot 0{,}7 + 0{,}55 \cdot 0{,}65 \cdot 0{,}3 + 0{,}55 \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}7 + 0{,}45 \cdot 0{,}65 \cdot 0{,}7 \\ &= 0{,}697.\end{aligned}$$

Définissons maintenant les événements

$$\begin{aligned} R &= \text{L'étudiant choisi a réussi le cours}\,; \\ A &= \text{L'étudiant choisi est dans la section A}\,; \\ B &= \text{L'étudiant choisi est dans la section B.} \end{aligned}$$

En utilisant la loi des probabilités totales et les résultats obtenus jusqu'à maintenant, on trouve que :

$$\mathbb{P}[R] = \mathbb{P}[R|A]\mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[R|B]\mathbb{P}[B] = 0{,}788 \cdot \frac{50}{125} + 0{,}697 \cdot \frac{75}{125} = 0{,}733\,4.$$

(c) Vous croisez un étudiant du cours de microbiologie et celui-ci a réussi l'examen 2. Quelle est la probabilité qu'il soit inscrit dans la section A ?

Définissons les événements suivants :

$$\begin{aligned}E &= \text{L'étudiant a réussi l'examen 2};\\ S_A &= \text{L'étudiant rencontré est dans la section A};\\ S_B &= \text{L'étudiant rencontré est dans la section B.}\end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Bayes, nous avons que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[S_A|E] &= \frac{\mathbb{P}[E|S_A]\mathbb{P}[S_A]}{\mathbb{P}[E|S_A]\mathbb{P}[S_A]+\mathbb{P}[E|S_B]\mathbb{P}[S_B]}\\ &= \frac{0{,}7\cdot\frac{50}{125}}{0{,}7\cdot\frac{50}{125}+0{,}65\cdot\frac{75}{125}}\\ &\approx 0{,}418.\end{aligned}$$

Question 3

Alba, Bernard et Coralie jouent au jeu suivant : Alba lance un dé à 6 faces régulier. Si elle obtient un 1, le jeu prend fin et elle est déclarée gagnante. Sinon, elle passe le dé à Bernard, qui le lance à son tour. S'il obtient un 1, il gagne et le jeu prend fin. S'il obtient autre chose, il passe le dé à Coralie, qui le lance. Si elle obtient un 1, elle gagne et le jeu prend fin. Si elle obtient autre chose, elle passe le dé à à Alba, qui le lance à nouveau. On continue ainsi jusqu'à ce que quelqu'un obtienne un 1.

(a) Quelle est la probabilité que le jeu se termine suite au premier lancer de Coralie ?

Pour que le jeu se termine au premier lancer de Coralie, Alba et Bernard ne doivent pas obtenir un 1 lors de leur premier lancer et Coralie doit obtenir un 1 lors de son premier lancer. Définissons les événements suivants :

$$\begin{aligned}E_A &= \text{Alba gagne à son premier lancer};\\ E_B &= \text{Bernard gagne à son premier lancer};\\ E_C &= \text{Coralie gagne à son premier lancer}\end{aligned}$$

Nous avons que

$$\mathbb{P}[E_C] = \mathbb{P}[{E_A}^{\mathrm{c}}\cap {E_B}^{\mathrm{c}}\cap E_C] = \mathbb{P}[{E_A}^{\mathrm{c}}]\mathbb{P}[{E_B}^{\mathrm{c}}|{E_A}^{\mathrm{c}}]\mathbb{P}[E_C|{E_A}^{\mathrm{c}}\cap {E_B}^{\mathrm{c}}] = \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{25}{216}.$$

(b) Quelle est la probabilité que ce soit Alba qui remporte le jeu ?

Définissons les événements suivants :

$$\begin{aligned}E_k &= \text{La partie se termine au } k^{\text{ième}} \text{ tour},\\ A &= \text{Alba gagne.}\end{aligned}$$

En utilisant la loi des probabilités totales, nous avons que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[A] &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[A|E_k]\mathbb{P}[E_k] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{5^3}{6^3}\right)^{k-1} \\
&= \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{5^3}{6^3}\right)^{k} \\
&= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{5^3}{6^3}} \\
&= \frac{36}{91}.
\end{aligned}$$

Autre solution : notons p la probabilité que ce soit Alba qui gagne. La probabilité que ce soit Bernard qui gagne est $\frac{5}{6}p$. En effet, pour que Bernard gagne, il faut qu'Alba perde au premier tour. Par la suite, il se trouve exactement dans la posture d'Alba au début d'une partie. De même, la probabilité que ce soit Coralie qui gagne est de $\left(\frac{5}{6}\right)^2 p$. Puisque les événements « Alba gagne », « Bernard gagne » et « Coralie gagne » forment une partition de l'espace fondamental, on en déduit que $p + \frac{5}{6}p + \left(\frac{5}{6}\right)^2 p = 1$. Lorsqu'on résout cette équation, on trouve que $p = \frac{36}{91}$.

Question 4

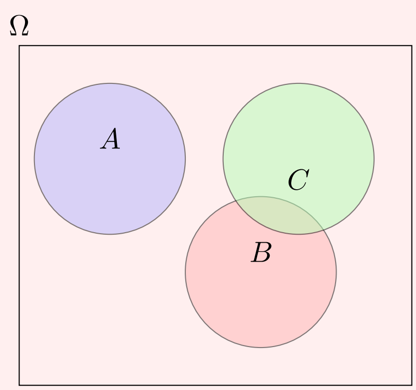
Qualifiez chacun des énoncés suivants de VRAI ou FAUX.

(a) Soit A, B et C des événements tels que A et B sont incompatibles, de même que A et C. Alors

$$\mathbb{P}[A \cup B \cup C] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] + \mathbb{P}[C].$$

Considérons une expérience aléatoire d'espace fondamental fini Ω telle que A, B et C soient des sous-ensembles de Ω vérifiant $A \cap B = A \cap C = \emptyset$ et $B \cap C \neq \emptyset$. D'après le principe d'inclusion-exclusion, nous avons que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[A \cup B \cup C] &= \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] + \mathbb{P}[C] - \mathbb{P}[A \cap B] - \mathbb{P}[A \cap C] - \mathbb{P}[B \cap C] + \mathbb{P}[A \cap B \cap C] && (1)\\
&= \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] + \mathbb{P}[C] - \mathbb{P}[\emptyset] - \mathbb{P}[\emptyset] - \mathbb{P}[B \cap C] + \mathbb{P}[\emptyset] && (2)\\
&= \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] + \mathbb{P}[C] - \mathbb{P}[B \cap C] && (3)\\
&\neq \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] + \mathbb{P}[C] \ \ (\text{ si } B \cap C \neq \emptyset) && (4)
\end{aligned}$$



Une telle expérience aléatoire est facile à s'imaginer : vous pouvez considérer l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé deux fois. Si on définit l'événement A par « Les deux résultats obtenus sont pairs », l'événement B par « Les deux résultats obtenus sont impairs » et l'événement C par « Au moins un des deux résultats obtenus est impair », on vérifie facilement que A est incompatible avec B et C, mais que B et C ne sont pas incompatibles.

(b) Soit A, B et C des événements tels que : A et B^c sont indépendants ; B et C^c sont indépendants ; A et C sont indépendants et $\mathbb{P}[A \cap B \cap C] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B] \cdot \mathbb{P}[C]$. Alors A, B et C forment une famille d'événements indépendants.

Le principe de préservation de l'indépendance implique que si E et F sont des événements indépendants, alors E et F^c le seront également. Comme A et B^c sont indépendants, il en est de même des événements A et $B^{cc} = B$. Par le même raisonnement, B et C sont indépendants. Nous avons donc qu'une famille comportant trois événements est telle que les événements sont indépendants deux à deux, en plus de vérifier la condition $\mathbb{P}[A \cap B \cap C] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B] \cdot \mathbb{P}[C]$. C'est précisément là une caractérisation d'une famille de trois événements indépendants, d'où la conclusion que l'énoncé est vrai.

Question 5

Vous pigez 9 cartes (sans remise) d'un paquet régulier de 52 cartes. On vous rappelle qu'il y a quatre couleurs dans un paquet régulier : pique, cœur, carreau et trèfle. On définit les événements suivants :

$A =$ Les trois premières cartes pigées sont de la même couleur ;

$B =$ On retrouve exactement 5 cartes d'une même couleur parmi les 9 cartes pigées ;

$C =$ Aucune carte de pique n'a été pigée parmi les 9 cartes.

(a) Calculez $\mathbb{P}[B|C]$.

Nous avons que

$$\mathbb{P}[B|C] = \frac{\operatorname{Card} B \cap C}{\operatorname{Card} C} = \frac{\binom{3}{1}\binom{13}{5}\binom{26}{4}}{\binom{39}{9}} = \frac{201\,825}{740\,962} \approx 0{,}272.$$

Explications : on choisit la couleur parmi trois qui sera représentée cinq fois. Comme il y a 9 cartes à choisir, il ne peut y avoir deux couleurs représentées cinq fois chacune. Ensuite, on choisit les cinq cartes parmi les 13 de la couleur identifiée préalablement. Finalement, on s'assure de choisir les $9 - 5 = 4$ cartes restantes parmi les cartes qui ne sont pas des piques, ni de la couleur représentée par les cinq cartes de même couleur. Pour ce qui est du dénominateur, c'est simplement le nombre de mains de 9 cartes pigées parmi les cartes qui ne sont pas des piques.

(b) Est-ce que B et C sont indépendants ? Justifiez en donnant la définition de deux événements indépendants, puis calculez les probabilités nécessaires afin de justifier votre réponse.

Deux événements B et C sont indépendants si $\mathbb{P}[B \cap C] = \mathbb{P}[B] \cdot \mathbb{P}[C]$. Nous avons que

$$\mathbb{P}[C] = \frac{\binom{39}{9}}{\binom{52}{9}} = \frac{21\,793}{378\,350}.$$

En utilisant la définition d'une probabilité conditionnelle, on déduit que

$$\mathbb{P}[B \cap C] = \mathbb{P}[B|C] \cdot \mathbb{P}[C] = \frac{201\,825}{740\,962} \cdot \frac{21\,793}{378\,350} = \frac{351}{22\,372}.$$

Aussi, nous avons que

$$\mathbb{P}[B] = \frac{\binom{4}{1}\binom{13}{5}\binom{39}{4}}{\binom{52}{9}} = \frac{740\ 259}{6\ 431\ 950} \approx 0{,}115.$$

Finalement, on constate que

$$\frac{740\ 259}{6\ 431\ 950} \cdot \frac{21\ 793}{378\ 350} \neq \frac{351}{22\ 372}.$$

Les événements B et C ne sont donc pas indépendants.

Autre solution : Pour que B et C soient indépendants, on doit avoir que $\mathbb{P}[B|C] = \mathbb{P}[B]$. On a trouvé en (a) que $\mathbb{P}[B|C] \approx 0{,}272$. Un peu plus haut, nous avons obtenu que $\mathbb{P}[B] \approx 0{,}115$. Par conséquent, ces événements ne sont pas indépendants.

(c) Calculez $\mathbb{P}[B|A]$.

Distinguons deux cas : dans le premier, les cinq cartes d'une même couleur pigées parmi les 9 cartes sont de la même couleur que les trois premières cartes pigées. Pour déterminer combien il y a de manières de faire ce choix, il suffit de choisir 2 cartes de cette couleur parmi les 10 restantes, puis choisir $9 - 3 - 2 = 4$ cartes d'une autre couleurs. Cela se fait de $\binom{10}{2}\binom{39}{4} = 3\ 701\ 295$ manières. Dans le second cas, les cinq cartes d'une même couleur pigées parmi les 9 cartes sont d'une couleur différente des trois premières cartes pigées. Pour déterminer combien il y a de manières de faire ce choix, il suffit de choisir une couleur parmi les trois restantes, ainsi que 5 cartes de cette couleur parmi les 13 disponibles. Par la suite, on doit choisir $9 - 3 - 5 = 1$ carte d'une couleur différente de celle pour laquelle nous venons d'en choisir 5. Des 44 cartes restantes du paquets, il y en a donc $13 - 5 = 8$ à éviter. On choisit donc notre carte parmi 36 cartes possibles. En mettant toutes ces informations ensemble, nous obtenons $\binom{3}{1}\binom{13}{5}\binom{36}{1} = 138\ 996$ manières. La réponse cherchée est donc

$$\frac{3\ 701\ 295 + 138\ 996}{\binom{49}{6}} = \frac{182\ 871}{665\ 896} \approx 0{,}275.$$